Continuité

Dans tout ce chapitre, $I, J \dots$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions

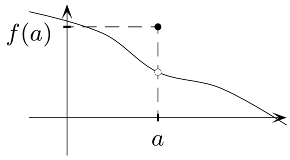
1.1.1 Continuité en un point

Définition (Continuité en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si $\lim_a f$ **existe**. On sait dans ce cas, f étant définie en a, que $\lim_a f = f(a)$. Ainsi on peut dire que, par définition, f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad |x-a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

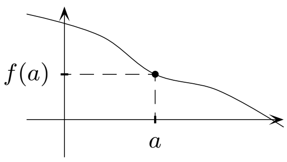
ce qui revient aussi à dire que : $\quad f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + o(1)$.

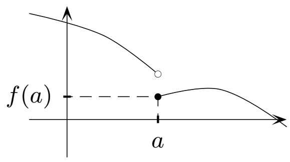
✌ ✌ ✌ **Explication** Dire que f est continue en a, c'est dire que quand x s'approche de a, $f(x)$ s'approche de $f(a)$ sans faire de saut, de sorte que le graphe de f soit sans trou.



f n'est pas continue en a.

f est continue en a.





f n'est pas continue en a.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

En effet Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $|\cdot|$ est continue en a. Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x-a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \Big||x| - |a|\Big| < \varepsilon.$$

Or n'oublions pas l'inégalité triangulaire — et sa version raffinée : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|$.
Il nous suffit alors de poser $\alpha = \varepsilon$ pour avoir ce qu'on veut.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

En effet On peut supposer $n \neq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $x \longmapsto x^n$ est continue en a.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|x^n - a^n\big| = |x-a| \times \left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1}\right| \overset{\text{Inégalité triangulaire}}{\leqslant} |x-a| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k |x|^{n-k-1}.$$

En particulier, pour $|x-a| \leqslant 1$, on a $|x| = \big|a + (x-a)\big| \leqslant |a| + |x-a| \leqslant |a| + 1$ et donc :

$$\big|x^n - a^n\big| \leqslant |x-a| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^k \big(|a|+1\big)^{n-k-1} = |x-a| \times \frac{\big(|a|+1\big)^n - |a|^n}{\big(|a|+1\big) - |a|} = |x-a| \times \Big(\big(|a|+1\big)^n - |a|^n\Big) \leqslant \big(|a|+1\big)^n |x-a|.$$

- Soit alors $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|x^n - a^n\big| < \varepsilon$.

Nos calculs précédents nous donnent l'idée de poser $\alpha = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{\big(|a|+1\big)^n}\right\}$, valeur pour laquelle on obtient bien le résultat voulu.

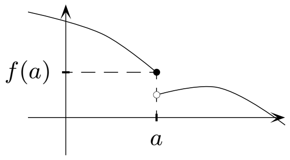
1.1.2 Continuité à gauche/à droite en un point

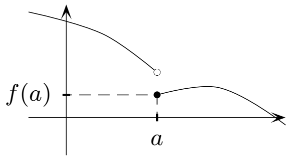
Définition (Continuité à gauche/à droite en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- On dit que f est *continue à gauche en a* si $f_{|I\cap\ ]-\infty,a]}$ est continue en a, i.e. si $\lim\limits_{a^-} f$ **<u>existe</u>** (et vaut $f(a)$).
- On dit que f est *continue à droite en a* si $f_{|I\cap[a,\infty[}$ est continue en a, i.e. si $\lim\limits_{a^+} f$ **<u>existe</u>** (et vaut $f(a)$).

✌✌✌ **Explication**

f est continue en a à gauche, mais pas à droite.





f n'est pas continue en a à droite, mais pas à gauche.

Théorème (Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathring{I}$.

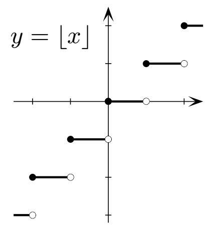
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Démonstration

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_a f \text{ existe} \iff \lim_{a^-} f \text{ et } \lim_{a^+} f \text{ existent } \textbf{et valent } f(a)$$
$$\iff f \text{ est continue à gauche et à droite en } a. \qquad \blacksquare$$

Exemple La fonction partie entière $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue à droite, mais pas à gauche, en tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela se voit très bien sur le graphe de la fonction.

En effet Soit $n \in \mathbb{Z}$. Souvenons-nous que pour tout $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$.
Par conséquent $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor$ et donc $\lfloor\cdot\rfloor$ est continue à droite en a.
Au contraire, pour tout $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$.
Alors $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq \lfloor n \rfloor = n$ et donc f n'est pas continue à gauche en a.



1.1.3 Continuité sur un intervalle

Définition (Continuité sur un intervalle) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *continue sur I* si f est continue en tout point de I.

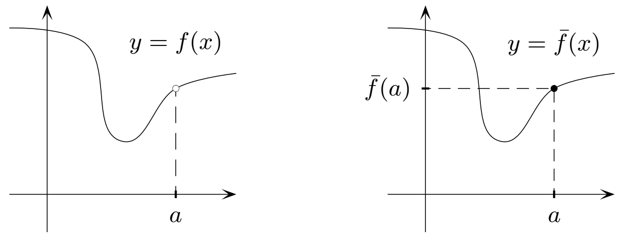
On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple Les fonctions usuelles — exp, ln, puissances, fonctions circulaires et hyperboliques et leurs inverses — sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs. Pour les fonctions de base — exp, ln, sin et cos — nous l'admettons. Pour les autres qui sont construites à partir de celles-ci, nous allons pouvoir le montrer bientôt.

1.2 Prolongement par continuité en un point

Définition (Prolongement par continuité en un point) Soient $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si $\lim\limits_a f$ existe **<u>et est finie</u>**, on dit que f est *prolongeable par continuité en a*. Le prolongement $\bar{f}$ de f obtenu en posant $\bar{f}(a) = \lim\limits_a f$ est alors continu en a ; on le note généralement encore f pour simplifier.

✌✌✌ **Explication**
Voici comment on peut représenter graphiquement ce théorème dans le cas où $a \in I$ — figures analogues si a est une borne de I.



Démonstration Nous devons montrer que $\bar{f}$ est continue en a, i.e. que $\lim_a \bar{f} = \bar{f}(a)$. Or par définition de $\bar{f}$, $\bar{f}$ et f coïncident sur $I \setminus \{a\}$. Par conséquent, l'affirmation selon laquelle f possède une limite en a, égale par définition à $\bar{f}(a)$, peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I \setminus \{a\}, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|\bar{f}(x) - \bar{f}(a)\right| < \varepsilon \qquad \bigstar.$$

Ceci signifie presque que $\lim_a \bar{f} = \bar{f}(a)$, mais pas tout à fait : en effet, $\bar{f}$ n'est pas définie sur $I \setminus \{a\}$ mais sur $\left(I \setminus \{a\}\right) \cup \{a\}$. Or il est bien clair qu'on peut remplacer « $I \setminus \{a\}$ » par « $\left(I \setminus \{a\}\right) \cup \{a\}$ » dans $\bigstar$, car $\left|\bar{f}(a) - \bar{f}(a)\right| = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, indépendamment de α. On obtient bien ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad |x-a| < \alpha \implies \left|\bar{f}(x) - \bar{f}(a)\right| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Exemple

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- La fonction $x \longmapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

1.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a.

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Démonstration Conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la limite. $\blacksquare$

✎✎✎ **En pratique** Ce théorème est le plus souvent utilisé dans le contexte suivant, que nous connaissons bien : celui des suites définies par une relation de récurrence de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». **<u>Si</u>** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et si f est définie et continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Le résultat suivant est une jolie application ultra-classique de la caractérisation séquentielle de la continuité et du fait que tout réel est limite de rationnels.

Théorème (Equation fonctionnelle des homothéties)

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Alors f est une homothétie, i.e. : $\quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}/ \quad f(x) = \lambda x$.

- Ce résultat peut s'exprimer aussi de la façon suivante : les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continus sur $\mathbb{R}$ sont exactement toutes les homothéties.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ et on pose $\lambda = f(1)$.

- Montrons que f est impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\quad 0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x), \quad$ et donc en effet $f(-x) = -f(x)$.

- Montrons que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$.
Déjà, $f(0.x) = f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) = 2f(0.x)$, et donc $f(0.x) = 0 = 0.f(x)$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(nx) = nf(x)$. Montrons que $f\big((n+1)x\big) = (n+1)f(x)$.
$$f\big((n+1)x\big) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$
Nous obtenons bien, par récurrence, le résultat annoncé.

- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$.
  Etant donné le second point, nous pouvons nous contenter de travailler avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Alors $-n \in \mathbb{N}$, et donc $f\big((-n)x\big) = (-n)f(x)$. Du coup :

$$0 = f(0) = f\big(nx + (-n)x\big) = f(nx) + f\big((-n)x\big) = f(nx) - nf(x),$$

  ce dont on tire le résultat : $f(nx) = nf(x)$.

- Montrons que $f_{|\mathbb{Q}} = \lambda\ \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
  Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrons que $f(r) = \lambda r$. Or via le troisième point :

$$\begin{aligned} f(p) = f(qr) &= \underline{qf(r)} \\ &= f(p.1) = pf(1) = \underline{\lambda p}. \end{aligned}$$

  On déduit de ceci que $f(r) = \lambda\ \dfrac{p}{q} = \lambda r$ comme voulu.

- Montrons que $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) = \lambda x$. Nous savons que tout réel est limite d'une suite de rationnels : soit donc $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels de limite x. Puisque f est continue en x, nous pouvons dire que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$ via la caractérisation séquentielle de la continuité. Il ne nous reste plus qu'à conclure grâce au quatrième point : $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda r_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lambda x$. ■

1.4 Opérations sur la continuité

Théorème (Opérations sur la continuité)

(i) **Somme, produit. . . :** La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point ; de même pour le produit. L'inverse d'une fonction continue en un point **non nulle en ce point** est continue en ce point. Idem pour les continuités à gauche, à droite et sur un intervalle.

(ii) **Composition :** Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

- **En un point :** Soit $a \in I$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
- **Sur un intervalle :** Si f est continue sur I et g continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration Conséquence immédiate du théorème sur les opérations sur les limites. ■

✎ ✎ ✎ **En pratique** Cette remarque est très importante : pour montrer la continuité d'une composée $g \circ f$, ne vous contentez pas d'un vague « C'est continu par composition ». Mettez en évidence les intervalles I et J et suivez scrupuleusement l'énoncé du résultat ci-dessus.

Exemple La fonction $x \longmapsto \left[\ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)\right]^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^\times$.

En effet

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) ; la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$; par composition $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^\times$; par somme, $x \longmapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$; et $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$; par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + e^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; on en déduit le résultat voulu au moyen d'une dernière composition.

2 Les grands théorèmes

C'est fort triste, mais le programme stipule que vous n'êtes pas obligés de savoir refaire les démonstrations des trois théorèmes présentés dans ce paragraphe. Je vous conseille néanmoins de les travailler. Tout de même, l'*algorithme de dichotomie* utilisé dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires est au programme et doit être bien compris.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

La définition suivante n'est qu'un rappel. Vous trouverez les détails le concernant dans le chapitre « Relations d'ordre ».

Définition (Intervalle de $\mathbb{R}$) On appelle *intervalle* (*de* $\mathbb{R}$) toute partie I de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y, t \in \mathbb{R}, \qquad \Big(x \in I \text{ et } y \in I \text{ et } x \leqslant t \leqslant y\Big) \implies t \in I.$$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

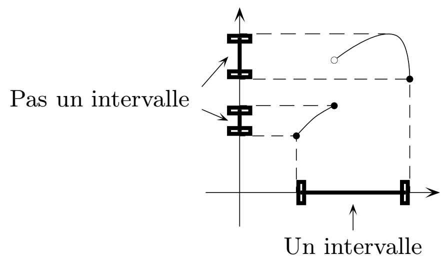
(i) L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Autre version (plus pratique) de ce théorème :

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors pour tous $a, b \in I$ et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b (**non unique en général**) tel que $y = f(x)$.

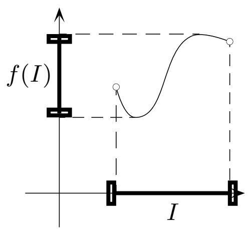
Explication

Dessinez n'importe quelle fonction continue sur un intervalle, l'assertion (i) vous paraîtra aussitôt claire. Cependant le moindre point de discontinuité la rend fausse ; c'est ce qu'indique la figure ci-contre sur un cas particulier.

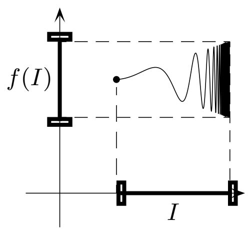


Attention !

L'assertion (i) affirme que si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Elle ne dit pas que I et $f(I)$ sont nécessairement deux intervalles de même nature. Par exemple, I peut être ouvert et $f(I)$ un segment ; ou bien I peut être semi-ouvert et $f(I)$ ouvert ; ou bien…



I ouvert,
$f(I)$ fermé.



I semi-ouvert,
$f(I)$ ouvert.

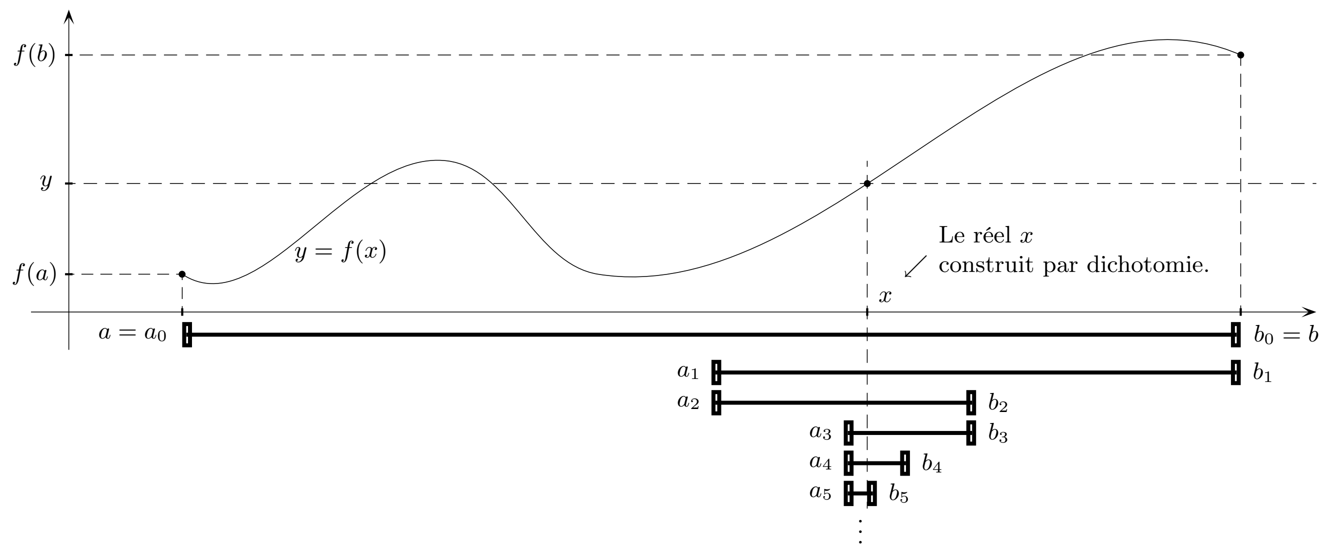
Démonstration

- Montrons l'équivalence des versions (i) et (ii) du théorème. Il nous suffira ensuite de montrer la vérité de l'assertion (ii).

  (i) $\implies$ (ii) On fait l'hypothèse que l'image d'un intervalle par une application continue est toujours un intervalle.
  Soient alors $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$, $a < b$, et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par hypothèse, $f\big([a, b]\big)$ est un intervalle ; par ailleurs $f(a) \in f\big([a, b]\big)$ et $f(b) \in f\big([a, b]\big)$; par conséquent $y \in f\big([a, b]\big)$. Cela signifie justement qu'il existe un x compris entre a et b pour lequel $y = f(x)$, comme voulu.

  (ii) $\implies$ (i) On fait l'hypothèse que pour toute application $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, pour tous $a, b \in I$ et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un x compris entre a et b tel que $y = f(x)$.
  Soit alors $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ fixée. Nous devons montrer que $f(I)$ est un intervalle. Soient donc $u, v \in f(I)$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $u \leqslant y \leqslant v$. Montrons que $y \in f(I)$. Ce qui est sûr, c'est qu'il existe deux réels $a, b \in I$ tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$. L'assertion (ii) que nous supposons vraie affirme alors l'existence d'un x compris entre a et b (donc $x \in I$) tel que $y = f(x)$, ce qui nous dit bien que $y \in f(I)$ comme voulu.

- Démontrons l'assertion (ii). Pour simplifier, supposons qu'on ait $a \leqslant b$ et $f(a) \leqslant f(b)$ — un raisonnement analogue au raisonnement qui suit établirait chaque autre cas. Nous cherchons un réel $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$. Le réel x va être construit au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*, que nous avons déjà rencontré quand nous avons démontré le théorème de Bolzano-Weierstrass.



Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

1) $a = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0 = b$;
2) $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$;
3) $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f(a_k) \leqslant y \leqslant f(b_k)$.

Nous allons construire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} rendant vraies les assertions 1), 2) et 3) au rang $(n+1)$.

Posons : $$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y \end{cases}.$$

Montrons que 1) est vraie au rang $(n+1)$. Or puisque $a_n \leqslant b_n$, on a $a_n \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n$, et donc nécessairement $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

De même, montrons 2) : $$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y \\ b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y \end{cases} = \frac{b_n - a_n}{2} \overset{2)}{=} \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Montrons enfin l'assertion 3). Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant y$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, donc aussitôt $f(a_{n+1}) = f(a_n) \overset{3)}{\leqslant} y \leqslant f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) = f(b_{n+1})$; et si au contraire $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y$, alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, donc $f(a_{n+1}) = f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < y \overset{3)}{\leqslant} f(b_n) = f(b_{n+1})$.

Voilà, notre construction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est achevée. Telles qu'elles sont construites, ces deux suites sont adjacentes via 1) et 2), et possèdent donc une limite réelle commune $x \in [a, b]$. Mais faisons tendre n vers ∞ dans les inégalités 3) ; la continuité de f en x et la caractérisation séquentielle de la limite montrent que $f(x) \leqslant y \leqslant f(x)$, i.e. que $y = f(x)$ comme voulu. ∎

✎✎✎ **En pratique (Valeurs approchées des zéros d'une fonction continue, par dichotomie)** Dans le cas où il s'agit de déterminer la valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue, réécrivons l'algorithme de dichotomie précédent sous la forme d'une procédure Maple `zerodicho`. A partir d'une fonction $f \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ — sous l'hypothèse que $a \leqslant b$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires — et d'un réel $\varepsilon > 0$, `zerodicho` détermine un zéro de la fonction f compris entre a et b à ε près.

```
> zerodicho :=proc(f,a,b,epsilon)          # La procédure "zerodicho" imite la preuve du théorème des valeurs
                                           # intermédiaires.
  local u, v ;                             # Elle requiert l'utilisation de deux variables locales u et v.
  u :=a ;                                  # La variable u joue le rôle des nombres a(n) successifs.
  v :=b ;                                  # La variable v joue le rôle des nombres b(n) successifs.
  while abs(v-u) > epsilon do              # Voici le corps de la procédure.
      if evalf(f(u)*f((u+v)/2)) <= 0       # Si f (u) et f ((u+v)/2) sont de signes contraires,
          then v :=(u+v)/2 ;               # [ u , (u+v)/2 ] contient un zéro de f,
                                           # donc on se restreint à cet intervalle.
      else u :=(u+v)/2 ;                   # Sinon l'intervalle [ (u+v)/2 , v ] contient un zéro de f.
      fi ;                                 # Tant que |v-u| > epsilon, on rétrécit l'intervalle [ u , v ]
  od ;                                     # jusqu'à obtenir l'approximation voulue d'un zéro de f.
  evalf((u+v)/2) ;                         # On demande à la procédure de renvoyer (u+v)/2 (sous forme flottante,
  end ;                                    # sinon Maple risque de nous renvoyer des fractions très compliquées.
```

Exemple L'équation $e^{-x} = x$ d'inconnue $x \in]0,1[$ possède une solution.

En effet La fonction $f : x \longmapsto e^{-x} - x$ est continue sur $[0,1]$ et on a $f(0) = 1$ et $f(1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$. Du coup, comme $f(1) \leqslant 0 \leqslant f(0)$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 0$ via le théorème des valeurs intermédiaires. Evidemment, $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

Corollaire (Image d'un intervalle par une application continue strictement monotone) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$.

- Si f est strictement croissante sur I :

  1) et si $I = [a,b]$, alors $f(I) = \big[f(a), f(b)\big]$; 2) et si $I =]a,b]$, alors $f(I) = \big]\lim\limits_{a^+} f, f(b)\big]$;

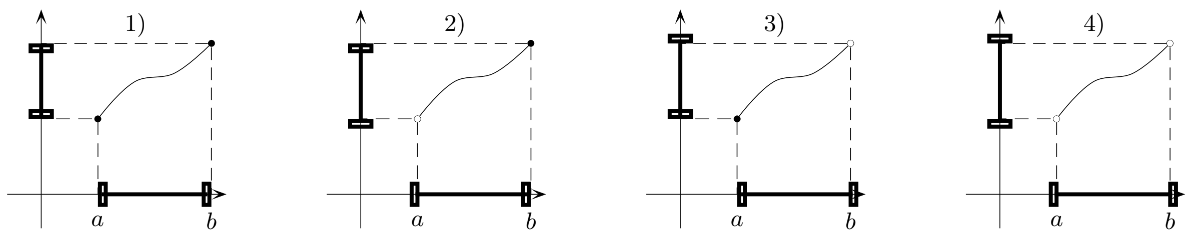
  3) et si $I = [a,b[$, alors $f(I) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$; 4) et si $I =]a,b[$, alors $f(I) = \big]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f\big[$.

- Si f est strictement décroissante sur I :

  1) et si $I = [a,b]$, alors $f(I) = \big[f(b), f(a)\big]$; 2) et si $I =]a,b]$, alors $f(I) = \big[f(b), \lim\limits_{a^+} f\big[$;

  3) et si $I = [a,b[$, alors $f(I) = \big]\lim\limits_{b^-} f, f(a)\big]$; 4) et si $I =]a,b[$, alors $f(I) = \big]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f\big[$.

✌ ✌ ✌ **Explication** En principe ce résultat est très intuitif, mais au cas où, illustrons-le de quelques figures dans le cas où f est strictement croissante.



Démonstration Contentons-nous de travailler dans le cas où f est strictement croissante sur I. Puisque f est continue sur I, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f(I)$ est un intervalle.

Supposons qu'on ait $I = [a,b[$ — les autres cas se traitent avec le même genre d'idées. Nous savons, en vertu du théorème de la limite monotone, que $\lim\limits_{a^+} f = \inf f(I)$ et que $\lim\limits_{b^-} f = \sup f(I)$. Or f est continue en a, donc $\inf f(I) = \lim\limits_{a^+} f = f(a)$. Comme $f(a) \in f(I)$, $f(I)$ est l'un des intervalles suivants : $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big]$ ou $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. Mais peut-on avoir $\lim\limits_{b^-} f \in f(I)$? Si c'était le cas, il existerait alors $x \in I$ tel que $f(x) = \lim\limits_{b^-} f$, et aussitôt f serait constante égale à $\lim\limits_{b^-} f$ sur $[x,b[$, ce qui contredirait la **stricte** croissance de f. Puisque donc $\lim\limits_{b^-} f \notin f(I)$, alors $I \neq \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big]$. Conclusion : $I = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. ■

✌ ✌ ✌ **Explication** Vous avez utilisé déjà souvent le corollaire que nous venons de démontrer. En Terminale, on vous a demandé parfois de montrer qu'une certaine fonction $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ s'annule une et une seule fois sur $[a,b[$ — par exemple, mais vous saviez le faire aussi pour les autres formes d'intervalle. Que racontiez-vous alors ?

1) Tout d'abord, généralement en étudiant le signe de f', vous montriez que f est strictement monotone sur $[a,b[$, par exemple strictement croissante.

2) Ensuite, vous calculiez $\lim\limits_{b^-} f$.

3) La stricte croissance de f et sa continuité vous permettait alors d'affirmer le caractère bijectif de f de $[a,b[$ sur $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$.

4) Il ne vous restait plus qu'à vérifier que 0 se trouve bien dans l'intervalle $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$, et vous en déduisiez bien que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[a,b]$.

A présent, il est indispensable que vous compreniez quels théorèmes sont cachés précisément derrière l'étape 3) de cette méthode. L'argument que vous donniez d'un coup d'un seul en Terminale est en réalité composé de deux arguments parallèles. La stricte croissance de f, indépendamment de toute continuité, implique l'injectivité de f sur $[a,b[$. Par conséquent f réalise une bijection de $[a,b[$ sur son image $f\big([a,b[\big)$. Mais puisque que $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$ via le corollaire précédent (à base de continuité, lui), f réalise comme voulu une bijection de $[a,b[$ sur $\big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$. La continuité n'est donc là « que » pour nous assurer de l'égalité $f\big([a,b[\big) = \big[f(a), \lim\limits_{b^-} f\big[$.

2.2 Image d'un segment par une fonction continue

Théorème (Image d'un segment par une fonction continue)

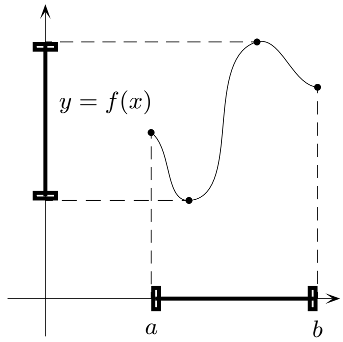
(i) L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Autre version (plus pratique) de ce théorème :

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. possède un maximum et un minimum (**non uniques en général**).

Explication

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ; mais nous avons remarqué que l'image d'un intervalle ouvert (resp. semi-ouvert) n'est pas nécessairement un intervalle ouvert (resp. semi-ouvert). Le présent théorème affirme qu'en tout cas un segment est toujours transformé en un segment par une application continue.
Sur un dessin, le fait que la fonction continue f soit bornée sur $[a,b]$ signifie que lorsqu'on trace le graphe de f entre les points d'abscisses a et b, le crayon ne part jamais à l'infini.



Attention ! Insistons : sur un intervalle qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée en général. Pensez à la fonction tangente.

Lemme Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite $\sup \mathcal{A}$, la borne supérieure étant prise dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration

- **Démonstration du lemme :**

  1) Supposons d'abord que $\sup \mathcal{A} = \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque n n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ contient au moins un élément $a_n \geqslant n$. Via le théorème de minoration, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ comme voulu.

  2) Supposons à présent que $s = \sup \mathcal{A} \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $s - \dfrac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ contient au moins un élément $a_n \geqslant s - \dfrac{1}{2^n}$. Comme par ailleurs la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par s, le théorème des gendarmes affirme que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

- **Démonstration du théorème :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle. Mais est-ce un segment ? Puisqu'un segment est un intervalle possédant un maximum et un minimum, il est clair que les versions (i) et (ii) sont équivalentes.

  Démontrons l'assertion (ii), i.e. que f possède un maximum et un minimum. Traitons seulement le cas d'un maximum — démonstration analogue pour un minimum. Posons $s = \sup f\big([a,b]\big)$ ($s = \infty$ éventuellement). Via le lemme appliqué à la partie $f\big([a,b]\big)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ telle qu'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = s$. En particulier, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite bornée (entre a et b). Via le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous en déduisons l'existence d'une suite extraite convergente $\big(x_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, disons de limite $x \in [a,b]$. Par continuité de f, et sachant que la limite d'une suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite, on obtient alors $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\big(x_{\varphi(n)}\big) = s$. En particulier $s = f(x) \in f\big([a,b]\big) \subseteq \mathbb{R}$, et donc $s < \infty$, ce qui signifie que f est majorée sur $[a,b]$. Mais l'égalité « $s = f(x)$ » montre aussi que s est plus que la borne supérieure de $f\big([a,b]\big)$, c'est en fait un maximum. Notre théorème est ainsi démontré. ■

Exemple Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

En effet Soient $T \in \mathbb{R}_+^\times$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique. Alors f est bornée sur $[0,T]$ via le théorème précédent, de sorte que pour un certain $K \in \mathbb{R}_+$: $\forall x \in [0,T], \quad \big|f(x)\big| \leqslant K$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\dfrac{x}{T} - 1 < \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor \leqslant \dfrac{x}{T}$, alors $0 \leqslant x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T < T$, et donc : $\big|f(x)\big| = \left| f\left(x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T\right) \right| \leqslant K$, ce qui montre bien que f est bornée sur tout $\mathbb{R}$.

2.3 Théorème de la bijection

Nous avons déjà rencontré le théorème de la bijection dans notre chapitre sur les fonctions usuelles, en version light. En voici à présent la version intégrale, avec démonstration.

Théorème (Théorème de la bijection) Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On note $J = f(I)$.

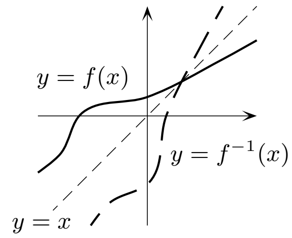
- Les assertions suivantes sont équivalentes :

  (i) f est strictement monotone sur I.

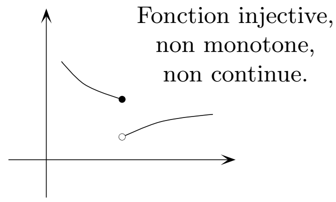
  (ii) f injective sur I (donc bijective de I sur J).

- Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur J.

✌✌✌ **Explication**
Le théorème de la bijection a une interprétation graphique très simple. Nous savons que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Si le graphe de f est continu, i.e. traçable sans qu'on ait besoin de lever la pointe du crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le serait-il pas ?



✖✖✖ **Attention !**
Nous savions déjà qu'une fonction strictement monotone est injective. Mais nous n'avions pas de réciproque à cela. Nous en possédons une à présent, **dans le cas des fonctions continues en tout cas**. Notez bien que le moindre point de discontinuité ruine la validité du théorème, comme l'illustre la petite figure ci-contre.



Démonstration

- Commençons par montrer l'équivalence des assertions (i) et (ii). Nous savons déjà que (i) implique (ii), sans hypothèse de continuité d'ailleurs.
  Réciproquement, faisons l'hypothèse que f est injective sur I et raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas strictement monotone. Alors f n'est ni croissante — donc il existe $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) > f(y)$ — ni décroissante — donc il existe $x', y' \in I$ tels que $x' < y'$ et $f(x') < f(y')$.
  Notons alors φ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) - f\big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big) \end{array}\right.$. Cette application est bien définie par *convexité* des intervalles — le segment joignant deux points quelconques d'un même intervalle est intégralement contenu dans cet intervalle. De plus, φ est continue sur $[0,1]$ en tant que composée. Or $\varphi(0) = f(x') - f(y') < 0$ et $\varphi(1) = f(x) - f(y) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme alors l'existence d'un $\lambda_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$, i.e. $f\big(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)x'\big) = f\big(\lambda_0 y + (1-\lambda_0)y'\big)$.
  Mais enfin, nous avons supposé que f est injective, donc $\lambda_0 x + (1-\lambda_0)x' = \lambda_0 y + (1-\lambda_0)y'$, ou encore $\lambda_0(x-y) = (1-\lambda_0)(y'-x')$. Dans cette égalité, le terme de gauche est strictement négatif et celui de droite strictement positif, c'est une contradiction. Nous avons bien montré que f est strictement monotone.

- Faisons à présent l'hypothèse que f est strictement monotone sur I — par exemple strictement croissante, pour simplifier. Alors bien sûr f réalise une bijection de I sur son image J.

  1) Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $x, y \in J$ tels que $x < y$. Nous devons montrer que $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. Or si on avait $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$, alors la croissance de f montrerait que $x \geqslant y$, contrairement à nos hypothèses ; d'où le résultat.

  2) Montrons enfin que f^{-1} est continue sur J. Soit $b \in J$. Le théorème de la limite monotone affirme l'existence des deux limites $\lim\limits_{b^-} f^{-1}$ et $\lim\limits_{b^+} f^{-1}$, dans le cas du moins où $b \in \mathring{J}$ — si b est une borne de J, on raisonne de la même façon d'un seul côté. De plus : $\lim\limits_{b^-} f^{-1} \leqslant f^{-1}(b) \leqslant \lim\limits_{b^+} f^{-1}$.
  Supposons par exemple qu'on ait $\lim\limits_{b^-} f^{-1} < f^{-1}(b)$ et donnons-nous x un réel compris strictement entre $\lim\limits_{b^-} f^{-1}$ et $f^{-1}(b)$. Alors $f^{-1}(y) \leqslant \lim\limits_{b^-} f^{-1} < x < f^{-1}(b) \leqslant f^{-1}(z)$ pour tout $y \in J \cap]-\infty, b[$ et pour tout $z \in J \cap [b, \infty[$, puisque f^{-1} est croissante. Ces inégalités montrent à la fois que $x \in f^{-1}(J)$ car x est compris entre deux éléments de $f^{-1}(J) = I$ qui est un intervalle, mais aussi que $x \notin f^{-1}(J)$ puisque x ne peut être aucun des $f^{-1}(y)$ ou $f^{-1}(z)$. Il y a là une contradiction, et donc $\lim\limits_{b^-} f^{-1} = f^{-1}(b)$. De même $\lim\limits_{b^+} f^{-1} = f^{-1}(b)$. Finalement $\lim\limits_{b} f^{-1} = f^{1}(b)$, i.e. f^{-1} est continue en b. ■

Exemple Les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs via le théorème de la bijection, comme nous l'avions déjà observé en début d'année.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. La fonction $x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $0^n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même dont l'inverse, notée $\sqrt[n]{\cdot}$, est appelée *fonction racine* $n^{\text{ème}}$. Le théorème de la bijection affirme que $\sqrt[n]{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons déjà construit une fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times,\quad x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln x}{n}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$, on a $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(e^{\frac{\ln x}{n}}\right)^n = e^{n\times\frac{\ln x}{n}} = e^{\ln x} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$, donc $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ par injectivité de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ et $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ sont donc égales (sauf en 0 où la seconde n'est pas définie). Nous possédons ici deux définitions d'un même objet mathématique.

3 Lipschitzienneté et continuité uniforme

Définition (Lipschitzienneté) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *K-lipschitzienne sur I* si :

$$\forall x, y \in I, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant K|x-y|.$$

Exemple La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est 1-lipschitzienne sur $[1, \infty[$.

En effet Soient $x, y \in [1, \infty[$. Alors : $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \left|\dfrac{x-y}{xy}\right| = \dfrac{|x-y|}{|x|.|y|} \leqslant |x-y|$ et c'est fini.

Définition (Continuité uniforme) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *uniformément continue sur I* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x, y \in I, \qquad |x-y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

✌✌✌ **Explication** Dire que f est continue sur I, c'est dire que f est continue en tout point y de I ; c'est donc dire que :

$$\forall y \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0/ \quad \forall x \in I, \qquad |x-y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Avec la continuité, on se fixe donc un point $y \in I$ et un niveau ε, et on récupère alors un certain α. Si on change de y ou de ε, on change a priori la valeur du α.

Avec la continuité **uniforme**, on obtient un α en ayant seulement fixé un ε. Aussi ce α est-il **valable pour tout point** $y \in I$. On parle de continuité **uniforme** pour signifier cette indépendance de α par rapport à y.

✖✖✖ **Attention !** Toute permutation abusive des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est plus que jamais exclue.

Théorème Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

(i) Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

(ii) Si f est lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I (et donc continue sur I).

Démonstration

(i) Supposons f uniformément continue sur I et montrons que f est alors continue sur I. Il s'agit donc de montrer que f est continue en tout point de I. Soit $a \in I$ un tel point. On obtient la continuité de f en a en posant tout simplement « $y = a$ » dans la définition de la continuité uniforme de f sur I.

(ii) Supposons f K-lipschitzienne sur I pour un certain $K \in \mathbb{R}_+^\times$ — nous pouvons bien sûr choisir $K \neq 0$ — et tâchons de montrer que f est uniformément continue sur I.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{K}$ et montrons que : $\forall x, y \in I, \qquad |x-y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$.
Fixons pour cela $x, y \in I$ et supposons qu'on ait $|x-y| \leqslant \alpha$. Alors :

$$\left|f(x) - f(y)\right| \overset{K-\text{lipschitzienneté}}{\leqslant} K|x-y| \leqslant K\alpha = \varepsilon \qquad \text{comme voulu.}$$

■

Le théorème suivant établit une réciproque, dans le cas où I est un $\boxed{\textbf{segment}}$, de l'affirmation précédente selon laquelle la continuité uniforme implique la continuité.

Théorème (Théorème de Heine) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\exists\, \varepsilon > 0/ \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists\, x, y \in [a,b]/ \qquad |x-y| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, nous pouvons donc nous donner deux éléments $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que $|x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| > \varepsilon$ — choisir $\alpha = \dfrac{1}{n}$.
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant ainsi bornée entre a et b, elle possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, de limite un certain réel $\ell \in [a,b]$.
- Mais nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. L'inégalité $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)}$ et le théorème des gendarmes impliquent donc que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = \ell$.
- Pour conclure, remarquons que notre application f est continue en ℓ. Par conséquent, si nous passons l'inégalité $\big|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\big| > \varepsilon$ à la limite, nous obtenons $0 = \big|f(\ell) - f(\ell)\big| \geqslant \varepsilon > 0$. Contradiction. ■

✖✖✖ __Attention !__ Le théorème de Heine est vrai uniquement parce qu'il y est question de segments. Par exemple, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais elle n'y est pas uniformément continue.

En effet Montrons que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$. Il s'agit de montrer que :

$$\exists\, \varepsilon > 0/ \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists\, x, y \in\,]0,1]/ \qquad |x-y| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| > \varepsilon.$$

Posons donc $\varepsilon = 1$. Donnons-nous ensuite $\alpha > 0$ quelconque et posons $x = \min\big\{\alpha, 1\big\}$ et $y = \dfrac{x}{2}$. On a alors bien $x, y \in\,]0,1]$ et en outre : $|x-y| = \left|x - \dfrac{x}{2}\right| = \dfrac{x}{2} \leqslant \alpha$ et $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x}\right| = \dfrac{1}{x} > 1 = \varepsilon$. C'est terminé.

4 Extension au cas des fonctions complexes

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenu pour les fonctions réelles aux fonctions complexes. Les notions de continuité en un point, à gauche, à droite, et de continuité sur un intervalle sont définies dans le cas des fonctions complexes de la même façon que dans le cas des fonctions réelles — mais $|\cdot|$ désigne dans ce contexte la fonction module, et non la fonction valeur absolue. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la caractérisation de la limite d'une fonction complexe en un point à l'aide de ses parties réelle et imaginaire.

Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a.
- $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

De même les assertions :

- f est continue sur I.
- $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

La caractérisation séquentielle de la continuité est maintenue. De même les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les fonctions continues donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel.

Les grands théorèmes sur la continuité — en premier lieu, le théorème des valeurs intermédiaires — sont faux pour les fonctions complexes. Par exemple, l'image du segment $[0, 2\pi]$ par la fonction continue $t \longmapsto e^{it}$ est le cercle trigonométrique, qui n'est pas un intervalle.